Факултет техничких наука у Чачку
Универзитет у Крагујевцу
07.09.2020. год.

Пријемни испит из

МАТЕМАТИКЕ

Основне струковне студије

1. Упростити израз
$$\frac{xy-y^2}{x^2-xy}+\frac{x^2-y^2}{xy}.$$

   Решење.
   $\dfrac{xy-y^2}{x^2-xy}+\dfrac{x^2-y^2}{xy}=\dfrac{y(x-y)}{x(x-y)}+\dfrac{x^2-y^2}{xy}=\dfrac{y}{x}+\dfrac{x^2-y^2}{xy}=$
   $\dfrac{y^2+x^2-y^2}{xy}=\dfrac{x}{y}$, за $x\neq y$, $x\neq 0$ и $y\neq 0$.

2. Израчунати
$$\frac{3}{a+x}-\frac{2x}{a^2-x^2}+\frac{a^2+ax}{a^2x-x^3}-\frac{a-x}{ax+x^2}.$$

   Решење.
   $\dfrac{3}{a+x}-\dfrac{2x}{a^2-x^2}+\dfrac{a^2+ax}{a^2x-x^3}-\dfrac{a-x}{ax+x^2}=$
   $\dfrac{3}{a+x}-\dfrac{2x}{(a-x)(a+x)}+\dfrac{a(a+x)}{x(a-x)(a+x)}-\dfrac{a-x}{x(a+x)}=$
   $\dfrac{3x(a-x)-2x^2+a(a+x)-(a-x)^2}{x(a-x)(a+x)}=\dfrac{3ax-3x^2-2x^2+a^2+ax-a^2+2ax-x^2}{x(a-x)(a+x)}=$
   $\dfrac{6ax-6x^2}{x(a-x)(a+x)}=\dfrac{ax(a-x)}{x(a-x)(a+x)}=\dfrac{a}{a+x}$, за $x\neq 0$ и $x\neq\pm a$.

3. Одредити чланове аритметичке прогресије, ако је збир петог и седмог члана 34, а збир првих двадесет чланова 610.

   Решење.

   $a_5=a_1+4d$ и $a_7=a_1+6d$, па је $a_5+a_7=2a_1+10d=34$ (1).
   $S_{20}=10(2a_1+19d)=610$, тј. $2a_1+19d=61$. (2)

   Из (1) и (2) следи да је $9d=27$, па је $d=3$ и $a_1=2$, а тражени низ је 2, 5, 8,..

4. Решити неједначину

$$\frac{12-2x}{x^2-x} \geq 1.$$

Решење.

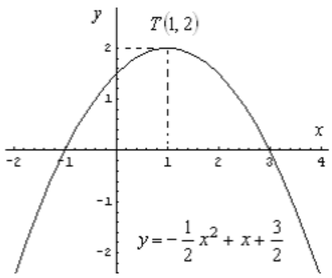
За $x \neq 0$ и $x \neq 1$ важи $\dfrac{12-2x-x^2+x}{x(x-1)} \geq 0$, тј. $\dfrac{x^2+x-12}{x(x-1)} \leq 0$. Растављањем броиоца на чиниоце добијамо $\dfrac{(x+4)(x-3)}{x(x-1)} \leq 0$. Из таблице видимо да је решење неједначине $x \in [-4, 0) \cup (1, 3]$.

		-4		0		1		3	
$x+4$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x-3$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
x	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$\dfrac{(x+4)(x-3)}{x(x-1)}$	$+$	0	$-$	//	$+$	//	$-$	0	$+$

5. У квадратној функцији $y = -\dfrac{1}{2}x^2+(m-2)x+\dfrac{m}{2}$ одредити параметар m тако да за $x = 1$ функција достигне максимум. За тако одређену вредност параметра m нацртати график дате функције.

Решење.

Услов да задата функција достигне максимум је $y' = 0$, тј. $-x + m - 2 = 0$. Заменом вредности $x = 1$ добијамо $m = 3$, па је $y = -\dfrac{1}{2}x^2 + x + \dfrac{3}{2}$ тражена функција.



6. Осни пресек купе је једнакокраки троугао са углом при врху 120^o. Одредити површину и запремину купе ако је њена изводница $s = 2\sqrt{3}$.

Решење.

Угао на основиц осног пресека је 30^o, па је на основу синусне теореме дужина основице 6, а полупречник базе купе $r = 3$. Висина купе $H = \dfrac{s}{2} = \sqrt{3}$. Површина купе је $P = r^2\pi + r\pi s = (9 + 6\sqrt{3})\pi$. Запремина купе је $V = \dfrac{r^2\pi H}{3} = 3\sqrt{3}\pi$.